جامعة البعث	امتحان مقرر الطبولوجيا (2)	اسم الطالب :
كلية العلوم	السنة الثالثة - رياضيات	المدة : ساعة ونصف
قسم الرياضيات	الفصل الأول للعام الدراسي 2016/2015	العلامة : 100

السؤال الأول (20 علامة) :

أ – عرّف الآتي : 1) T_1– فضاء . 2) الهوميومورفيزم

ب – أعط ثلاثة تعاريف متكافئة للفضاء الطبولوجي المترابط .

السؤال الثاني (40 علامة) : لتكن X مجموعة غير منتهية و τ الطبولوجيا القوية (المتقطعة) على X .

أ – أثبت أن الفضاء المتقطع (X,τ) 1) غير متراص ، 2) غير مترابط ، 3) معدود أول .

ب – عيّن قاعدة لهذا الفضاء .

ج - علّل الآتي : كل تطبيق مستمر منطلقه الفضاء المتقطع (X,τ) هو تطبيق مستمر .

د – بفرض A مجموعة جزئية فعلية من X . أي $A \neq \emptyset$ و $A \neq X$ ، أوجد

A° و $\bar{A}$ و $\dot{A}$ و $Fr(A)$ و $Ext(A)$.

السؤال الثالث (20 علامة) : ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً من الفضاء الطبولوجي X إلى الفضاء الطبولوجي Y و A مجموعة جزئية من X و x_0 نقطة من X . إذا كانت x_0 نقطة لاصقة بالمجموعة A ، و f مستمراً في النقطة x_0 ، فإن النقطة $f(x_0)$ تكون لاصقة بالمجموعة $f(A)$.

السؤال الرابع (20 علامة) : أ – أثبت أن اجتماع مجموعتين متراصتين في فضاء طبولوجي هو مجموعة متراصة .

ب – ليكن A فضاءجزئياً من الفضاء الطبولوجي X ، حيث A مجموعة مفتوحة . بفرض B مجموعة جزئية من A أي $B \subseteq A$ ، أثبت أن B تكون مفتوحة في الفضاء الجزئي A إذا وفقط إذا كانت مفتوحة في الفضاء الكلي X .

حمص في 26 / 1 / 2016 أ . د . طالب غريبة

٥٢

- سلم تصحيح مقرر التبولوجيا العامة (٢)

السنة الثالثة - رياضيات.

الفصل الأول. العام الدراسي ٢٠١٥/٢٠١٦

السؤال الأول (٢٠ علامة):

أ - التعاريف: ١) نقول عن فضاء طبولوجي بأنه T_1 - فضاء إذا كان من أجل أي نقطتين مختلفتين منه، يوجد لكل منهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى. 4

٢) نقول عن التطبيق $f: X \longrightarrow Y$ بأنه هوميومورفيزم إذا حقق الشروط: 4

١- f تقابل ، ٢- f مستمر ، ٣- f^{-1} مستمر

ب - الفضاء المترابط:

4 - لا يساوي اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين

4 - لا يساوي اجتماع مجموعتين مغلقتين غير خاليتين و غير متقاطعتين.

4 - المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان في آن واحد هما المجموعة الكلية والمجموعة الخالية.

السؤال الثاني (٤٠ علامة):

أ - الفضاء المتقطع غير متراص لأن أسرة المجموعات وحيدة العنصر فيه $\{\{x\}\}_{x\in X}$ تشكل تغطية مفتوحة لا تحوي تغطية جزئية منتهية، لكون X مجموعة غير منتهية. 5

- الفضاء المتقطع غير مترابط لأن أي مجموعة جزئية فعلية منه تكون مفتوحة ومغلقة في آن معاً. 5

- الفضاء المتقطع معدود أول لأن $\{\{x\}\}$ تشكل جملة جوارات أساسية منتهية (قابلة للعد) لأي نقطة من نقاطه. 5

5 ب - أسرة المجموعات وحيدة العنصر $\{\{x\}\}_{x\in X}$ تشكل قاعدة للفضاء.

ج - لأن الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مفتوحة في المستقر ستكون مفتوحة في المنطلق (لأن جميع المجموعات في الفضاء المتقطع مفتوحة). 5

/

٥ - $A^\circ = A$ ، $\bar{A} = A$ ، $A' = \Phi$ ،

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = A \setminus A = \Phi$ ، $Ext(A) = X \setminus A$

السؤال الثالث (٢٠ علامة) : البرهنة :

لتكن V جواراً كيفياً للنقطة $f(x_0)$ في Y. إن الصورة العكسية $f^{-1}(V)$ تكون جواراً للنقطة x_0 حسب الاستمرار. وبما أن x_0 نقطة لاصقة بـ A، فإن $f^{-1}(V) \cap A \neq \Phi$، أي توجد نقطة مثل x تنتمي إلى هذا التقاطع، عندها:

$$f(x) \in f\left(f^{-1}(V) \cap A\right) \subseteq f f^{-1}(V) \cap f(A) \subseteq V \cap f(A)$$

أي أن أي جوار للنقطة $f(x_0)$ يتقاطع مع $f(A)$، مما يعني أن النقطة $f(x_0)$ لاصقة بالمجموعة $f(A)$.

السؤال الرابع (٢٠ علامة) :

أ - لتكن A و B مجموعتين متراصتين في فضاء طوبولوجي X. لنأخذ تغطية مفتوحة U للاجتماع $A \cup B$. إن U تغطية لـ A، وبما أن A متراصة فإن هذه التغطية تحتوي على تغطية جزئية منتهية U_1، وبالمثل U تغطي B وبالتالي توجد تغطية جزئية منتهية U_2 لـ B. إن $U_1 \cup U_2$ تغطية جزئية منتهية لـ $A \cup B$، مما يعني أن هذا الاجتماع متراص حسب التعريف.

ب - نفرض B مفتوحة في الفضاء الجزئي A. توجد مجموعة مفتوحة U في الفضاء الكلي X بحيث $U \cap A = B$. بما أن U و A مفتوحتان في X فإن تقاطعهما الذي يساوي B هو مجموعة مفتوحة في X.

لنفرض الآن أن B مفتوحة في X، عندها: $B \cap A$ مفتوحة في الفضاء الجزئي A، ولكن $B \cap A = B$، إذن B مفتوحة في A.

أ. د. طالب غريبة ٢٠١٦/١/٢٦